Тәжірибелік сабақ

Тақырып 13. Функция экстремумдары. Өсу, кему аралықтары. Иілу нүктесі. Ойыс, дөңес аралықтар. Туынды көмегімен функцияны зерттеп, графигін салу схемасы

1. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ функциясын зерттеп, графигін салу.

*Шешуі.*1. Анықталу облысы: $x=1$ нүктесінен басқа барлық нақты сандар жиыны.

2. $x=1$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{1-0-1}\right)=-\left(\frac{1}{0}\right)=-\left(\frac{1}{0}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\left(\frac{1}{1+0-1}\right)=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$$

$x=1$ нүктесі екінші түрдегі үзіліс нүктесі.

3. Егер $x=0$ болса, онда $y=0$.

$(-\infty;1)$ аралығында $y<0$, ал $(1;\infty)$ аралығында $y>0$.

4. $f(x)\neq f(-x)$, $f(x)\neq -f(x)$, $f(x+T)\neq f(x)$ болғандықтан, $f(x)$ функциясы жұп та емес, тақ та емес және периодты емес.

5. Өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табайық.

$$y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

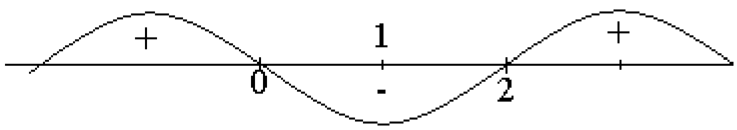
Алдымен, кризистік нүктелерді анықтайық:

а) $y'=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\quad x_2=2$

б) $x=1$ нүктесінде y' анықталмаған, ендеше $x_3=1$

Сонымен, кризистік нүктелер: $x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=1.$

y'-тің таңбасы $x^2-2x=x(x-2)$ таңбасымен бірдей, яғни, $x^2-2x\geq 0$ теңсіздігін шешу жеткілікті. Бұл квадрат теңдеудің түбірлері 0 және 2, ал x^2-тің коэффиценті оң сан. Сонымен,



5-сурет

а) $(0;2)$ аралығында $y'<0$ болады, яғни, $(0;2)$ аралығында $f(x)$ кемиді;

б) $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ болса, $y'>0$ болады, яғни, $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ аралықтарында $f(x)$ функциясы өседі;

в) $x_1=0$ нүктесінен өткенде y' таңбасын « +»-тен «-»-ке өзгертеді, $x_2=2$ нүктесінен өткенде таңбасын «-»-тен « +»-ке өзгертеді, ал $x_3=1$ нүктесінен өткенде y' таңбасын өзгертпейді.

Сонымен, $x_1 = 0$ нүктесі $y_{\max}(x) = y(0) = 0$, $x_2 = 2$ нүктесі $y_{\min}(x) = y(2) = 4$
$x_3 = 1$ нүктесі функцияның анықталмаған нүктесі.

6. Функцияның қисығының ойыс, дөңестігін және иілу нүктелерін табалық.:

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

y'' -тің таңбасы (x-1)-дің таңбасымен бірдей. Ендеше,

а) $(-\infty;1)$ аралығында $y'' < 0$ болады, яғни, $(-\infty;1)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы - дөңес;

б) $(1;\infty)$ аралығында $y'' > 0$ болады, яғни, $(1;\infty)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы ойыс;

в) y'' таңбасын « –» -тен « +»-ке өзгерткенімен $x = 1$ иілу нүктесі бола алмайды, өйткені, y, y'' анықталмаған.

7. Асимптоталарды табалық.

а) $x = 1$ - вертикаль асимптота.

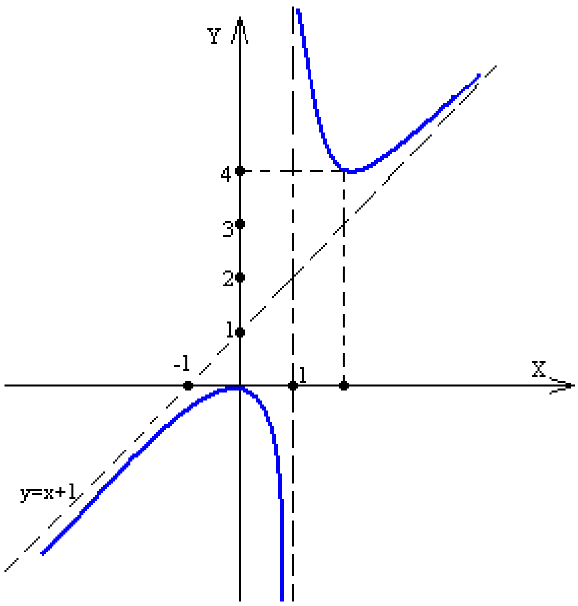
б) $y = kx + b$ -көлбеу асимптота.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1\ ,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Сонымен, $y = x + 1$- көлбеу асимптота.

8. Функцияның графигін тұрғызалық.



6-сурет

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар

1. Функцияның бірсарындылық аралықтарын тап $y = x^4 - 2x^2 - 5$.(Жауабы: $(-\infty;1)$ және (0;1) аралықтарында кемиді, (-1;0) және $(1;+\infty)$ аралықтарында өседі.)
2. Функцияның бірсарындылық аралықтарын тап $y = x/(x^2 - 6x - 16)$. (Жауабы: $(-\infty;-2)$, (-2;8), $(8;+\infty)$ аралықтарында кемиді.)
3. Функцияны экстремумға зертте $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$. (Жауабы: $y_{\min} = 0$, $x = 1$ және $x = 5$ болса, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$, егер $x = 3$ болса.)
4. Функцияны экстремумға зертте $y = x\ln^2 x$. (Жауабы: $y_{\max} = 4/e^2$, егер $x = e^{-2}$ болса; $y_{\min} = 0$, егер $x = 1$ болса.)
5. Функцияны экстремумға зертте $y = x - \ln(1 + x)$. (Жауабы: $y_{\min} = 0$, $x = 0$ болғанда.)
6.Функцияның $[-1;5]$ аралығындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін тап $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. (Жауабы: $y_{наим} = -6$, $x = 1$ болғанда; $y_{наиб} = 266$, $x = 5$ болғанда.)
7. Иілу нүктелерін, функцияның графигінің ойыс және дөңес болу аралықтарын тап $y = \ln(1 + x^2)$. (Жауабы: $M_1(1, \ln 2), M_2(-1, \ln 2)$.).
8. Функцияның графигінің асимптоталарын тап: $y = x^2/\sqrt{x^2 - 1}$. (Жауабы: $x = \pm 1, y = \pm x$.)
9. Функцияны толық зерттеп, графигін сал.

9.1. *У = In(x² +2x+2).* (Жауабы: Y_{min} = O , *x* = -1 болса; иілу нүктелері M_1(-2,ln2) және M_2(0,*ln2*)).
9.2.*У = (2x - 1)/(x - 1)²*. (Жауабы: Y_{min} = -1 , *x = o* болса; иілу нүктесі M_1(-1/2, -8/9); асимптоталары *x = 1* және *У = O.)*
9.3.*У = -ln(x² -4x+5).* (Жауабы: $У_{тах}$ = O, *x* = 2 болса; иілу нүктелері *M_1 (1,ln2),* *M_2(3, ln2)*)).